Διδακτικά εμπόδια στην έννοια της ασύμπτωτης συνάρτησης

Λέγοντας τον όρο **«διδακτικά (ή και γνωστικά) εμπόδια»** εννοούμε τα **επιστημολογικά εμπόδια**[1] που όταν μπαίνουν στην διδακτική πρακτική ονομάζονται έτσι. Στην συγκεκριμένη περίπτωση, ένα διδακτικό εμπόδιο είναι η ίδια η ετυμολογία της λέξης αφού νοηματοδοτικά παραπέμπει σε μια ευθεία που **«τείνει να γίνει εφαπτόμενη στην καμπύλη στο άπειρο»** ως μια ευθεία **«που πλησιάζει στο άπειρο το γράφημα της συνάρτησης χωρίς να το ακουμπά»** τέλος πάντων, η ετυμολογία <u>παραπέμπει σίγουρα</u> σε **«μια ευθεία που δεν ακουμπά την συνάρτηση»** . Να επαναλάβουμε, ότι αυτές οι πληροφορίες, δεν βγαίνουν από τον μαθηματικό ορισμό της έννοιας της ασύμπτωτης, αλλά από την ίδια την λέξη –όρο – έτυμον «ασύμπτωτη» Να μην ξεχνάμε, ότι η ίδια η λέξη, προϋπάρχει της μαθηματικής έννοιας Ένας μαθητής κάλλιστα μπορεί να την γνωρίζει και να την έχει καταχωρίσει στο μυαλό του με την σωστή σημασία.[2] Η μαθηματική σημασία για να καταχωριστεί επιτυχώς **εκ νέου**

ΟΡΙΣΜΟΣ

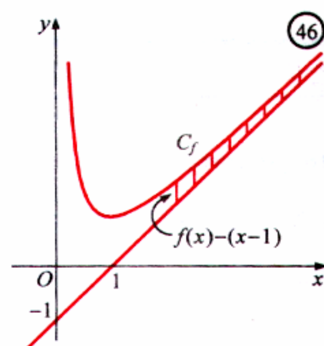
Αν $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\ell$ (αντιστοίχως $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\ell$), τότε η ευθεία $y=\ell$ λέγεται **οριζόντια ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$ (αντιστοίχως στο $-\infty$).

- Έστω η συνάρτηση

$$f(x)=x-1+\frac{1}{x}$$

και η ευθεία

$$g(x)=x-1 \quad (\Sigma\chi.\ 46).$$



Επειδή $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-g(x)]=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$, καθώς το x τείνει στο $+\infty$, οι τιμές της f προσεγγίζουν τις τιμές της g. Δηλαδή, η γραφική παράσταση της f προσεγγίζει την ευθεία $y=x-1$. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η ευθεία $y=x-1$ είναι **ασύμπτωτη (πλάγια)** της C_f στο $+\infty$. Γενικά:

ΟΡΙΣΜΟΣ

Η ευθεία $y=\lambda x+\beta$ λέγεται **ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$, αντιστοίχως στο $-\infty$, αν

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(\lambda x+\beta)]=0,$$

αντιστοίχως

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x)-(\lambda x+\beta)]=0.$$

Η ασύμπτωτη $y=\lambda x+\beta$ είναι **οριζόντια** αν $\lambda=0$, ενώ αν $\lambda\neq0$ λέγεται **πλάγια** ασύμπτωτη.

Για τον προσδιορισμό των ασυμπτώτων μιας συνάρτησης ισχύει το παρακάτω θεώρημα, του οποίου η απόδειξη παραλείπεται.

ΘΕΩΡΗΜΑ

Η ευθεία $y=\lambda x+\beta$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$, αντιστοίχως στο $-\infty$, αν και μόνο αν

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lambda\in\mathbb{R} \quad \text{και} \quad \lim_{x\to+\infty}[f(x)-\lambda x]=\beta\in\mathbb{R},$$

αντιστοίχως

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lambda\in\mathbb{R} \quad \text{και} \quad \lim_{x\to-\infty}[f(x)-\lambda x]=\beta\in\mathbb{R}.$$

---

[1] Τα επιστημολογικά εμπόδια (*obstacles épistémologiques*) είναι εσωτερικές αναπαραστάσεις που περιέχουν το προφανώς σωστό . Σε κάποιες περιπτώσεις είναι χρήσιμες αλλά τελικώς απενεργοποιούν την διαδικασία οικοδόμησης της γνώσης

[2] Ένας Αγγλόφωνος μαθητής δεν έχει κανένα τέτοιο πρόβλημα, αφού οι όροι asymptotic , asymptote δεν του λένε τίποτα από απόψεως ετυμολογικής αφού απλούστατα είναι Ελληνικές!

στον εγκέφαλο, ως ένα **νέο γνωστικό σχήμα που να τροποποιεί το προϋπάρχον παλαιό**, προϋποθέτει μια **γνωστική σύγκρουση** η οποία κατ΄ ουδένα τρόπο προσφέρεται με το σχήμα του βιβλίου . Το σχήμα εντείνει την παραμονή του **πρότερου προϋπάρχοντος γνωστικού σχήματος** δεν συμβάλλει στην σωστή τροποποίησή του , ενώ αυτό θα μπορούσε να επιτευχθεί με την παράθεση και ενός άλλου σχήματος όπου λ.χ. μια συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, έχει άπειρα κοινά σημεία με την ασύμπτωση και μάλιστα αν θεωρήσω Μ>0 οσοδήποτε μεγάλο και τον περιορισμό της f στο [M,+∞] η f με την ασύμπτωτη να έχει άπειρα κοινά σημεία .

Το βιβλίο του ΟΕΔΒ μάλιστα διασαφηνίζει- ώστε να μην υπάρχει καμμία παρανόηση εκ μέρους των μαθητών- ότι **«…η γραφική παράσταση της f , <u>προσεγγίζει</u> την ευθεία y=……»** (βλέπε παραπλεύρως) Για την έννοια της «προσέγγισης» το σχήμα που παρατίθεται μιλά από μόνο του και βεβαίως καλύπτει την έννοια της ασύμπτωτης **αυστηρά και μόνο για την συγκεκριμένη συνάρτηση.** Το σχήμα αυτό δεν καλύπτει όλες τις κλάσεις , αφού υπάρχει μία τουλάχιστον άλλη κλάση συναρτήσεων κάθε αντιπρόσωπος της οποίας , έχει κοινά σημεία (πεπερασμένα ή άπειρα) με τις ασύμπτωτες . Μια τέτοια συνάρτηση είναι η $f(x)=\left\{\begin{matrix} x+\frac{1}{x}\sin x^2, \alpha\nu\ \ \chi\neq 0 \\ 0\ ,\alpha\nu\ \ \chi=0 \end{matrix}\right\}$ η οποία επιδέχεται ως πλάγια ασύμπτωτη και στο $-\infty\ \kappa\alpha\acute{\iota}\ +\infty$ την y=χ

.Πράγματι:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x+\frac{1}{x}\sin x^2}{x}=\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x^2}\sin x^2)=1+0=0$$

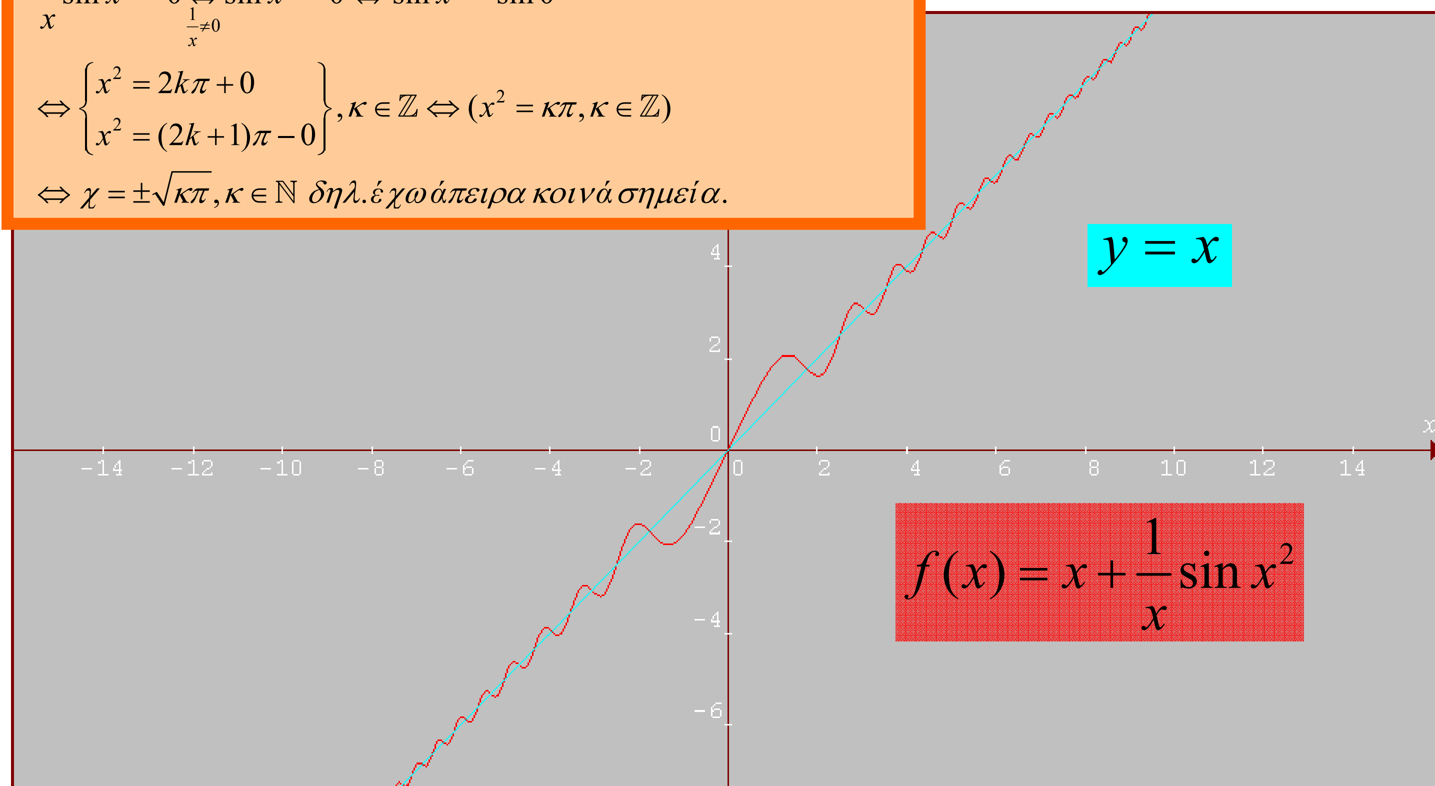
Ενώ $\beta=\lim_{x\to\infty}(f(\chi)-\alpha\chi)=\lim_{x\to\infty}(\chi+\frac{1}{\chi}\sin\chi^2-\chi)=0$

Η συνάρτηση $f(x)=x+\frac{1}{x}\sin x^2$ επιδέχεται στο $-\infty\ \kappa\alpha\acute{\iota}\ +\infty$ ως πλαγία ασύμπτωτη την y=x , η οποία έχει με την συνάρτηση άπειρα κοινά σημεία.
Πράγματι, η επίλυση της εξίσωσης *f(x)=x , δίνει:*

$$\frac{1}{x}\sin x^2=0\underset{\frac{1}{x}\neq 0}{\Leftrightarrow}\sin x^2=0\Leftrightarrow\sin x^2=\sin 0$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix} x^2=2k\pi+0 \\ x^2=(2k+1)\pi-0 \end{matrix}\right\},\kappa\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow(x^2=\kappa\pi,\kappa\in\mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow\chi=\pm\sqrt{\kappa\pi},\kappa\in\mathbb{N}\ \delta\eta\lambda.\acute{\varepsilon}\chi\omega\ \acute{\alpha}\pi\varepsilon\iota\rho\alpha\ \kappa o\iota\nu\acute{\alpha}\ \sigma\eta\mu\varepsilon\acute{\iota}\alpha.$$



Να αποδειχθεί, ότι είναι δυνατόν να υπάρχει το $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}\in\mathbb{R}$, αλλά η $f(x)$ να μην έχει πλάγια ασύμπτωτη.

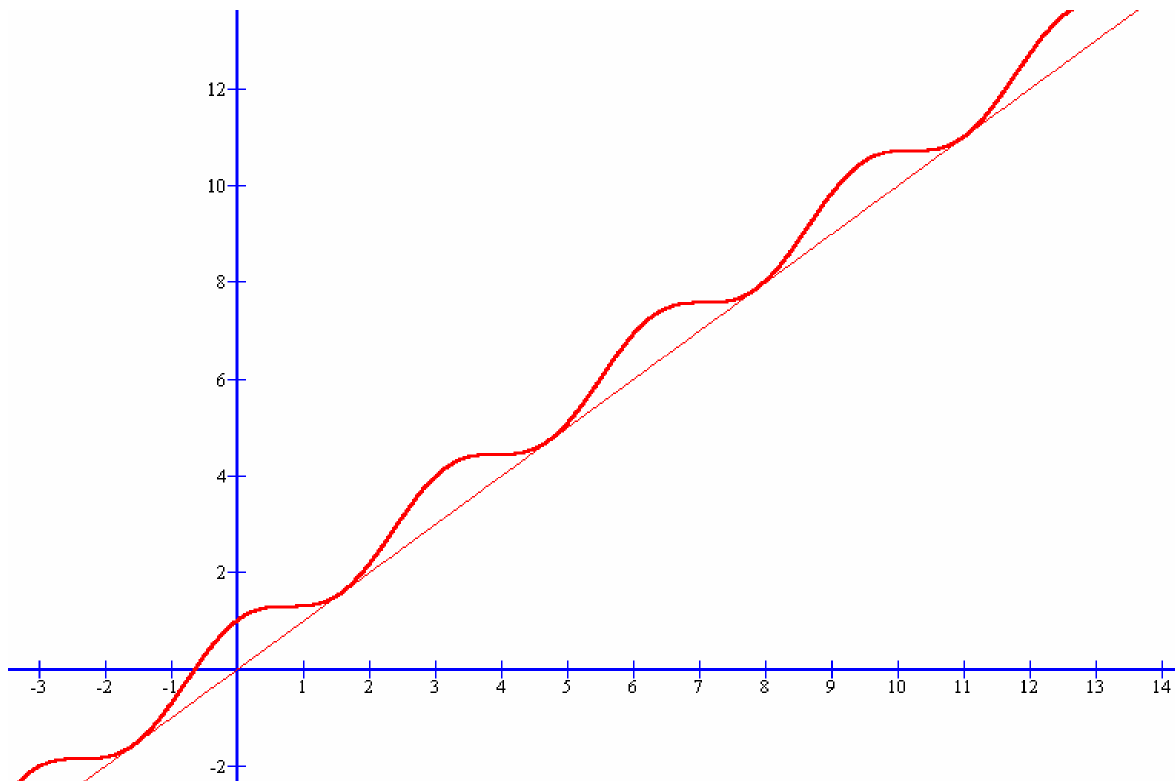
ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Αν π.χ. $f(x)=x+\sigma\upsilon\nu^2 x/\mathbb{R}$, τότε $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\sigma\upsilon\nu^2 x}{x}=$

$=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{\sigma\upsilon\nu^2 x}{x}\right)=1+0=1$

Όμως $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-\lambda x)=\lim_{x\to+\infty}\sigma\upsilon\nu^2 x$. Το τελευταίο όριο δεν υπάρχει, διότι αν θεωρήσω $x_n=2n\pi\to+\infty$, τότε

$\lim_{n\to+\infty}\sigma\upsilon\nu^2 x_n=\lim_{n\to+\infty}\sigma\upsilon\nu^2 2n\pi=\lim_{n\to+\infty}1^2=1$, ενώ αν

$y_n=2n\pi+\frac{\pi}{2}\to+\infty$, τότε $\lim_{n\to+\infty}\sigma\upsilon\nu^2 y_n=\lim_{n\to+\infty}0=0$.

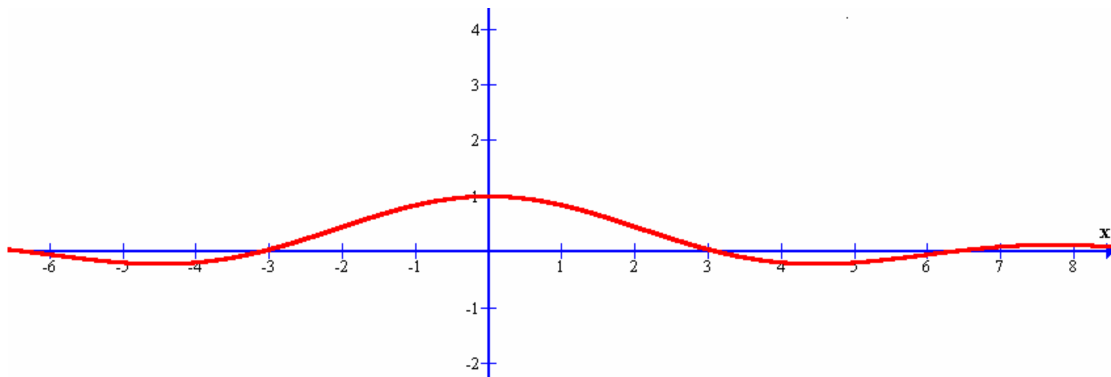


Η γραφική παράσταση της $f(x)=x+\sigma\upsilon\nu^2 x$ εφάπτεται σε άπειρα σημεία με την ευθεία y=x , αλλά δεν υπάρχει διάστημα της μορφής [Μ, $+\infty$) ή ($-\infty$,-Μ] (με Μ>0 , και Μ οσοδήποτε μεγάλο) έτσι ώστε σε αυτό το διάστημα η μεταξύ τους απόσταση να τείνει στο 0

Ένα άλλο παράδειγμα με οριζόντια ασύμπτωτη αυτή τη φορά είναι το παρακάτω:

Θεωρώ την $f(x)=\begin{cases}\frac{\eta\mu x}{x}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$ γι αυτήν ισχύει ότι : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu x}{x}=0$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\eta\mu x}{x}=0$, πράγμα που σημαίνει ότι η ευθεία y=0 (δηλαδή ο άξονας xx') είναι οριζόντια ασύμπτωτη της $f(x)$.

Όμως η $f(x)$ και ο άξονας xx' έχουν άπειρα (αριθμήσιμα) κοινά σημεία, αφού η εξίσωση $\frac{\eta\mu x}{x}=0 \underset{x\neq 0}{\Leftrightarrow} \eta\mu x=0 \Leftrightarrow (x=\kappa\pi,\ \kappa\in\mathbb{Z})$ και έτσι φαίνεται η απειρία των κοινών σημείων.



Να σημειώσουμε, ότι η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}\frac{\eta\mu x}{x}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$ είναι παντού συνεχής και έχει την μορφή μιας αποσβενυόμενης φθίνουσας ταλάντωσης και προς το $+\infty$ και προς το $-\infty$, όπως φαίνεται στην παραπάνω γραφική της παράσταση

Τελικά , η σύγχυση της έννοιας «ασύμπτωτη συνάρτησης» εκτός από την ετυμολογική σημασία της λέξης «ασύμπτωτη» (και δευτερογενώς από υπάρχουσες ελλιπείς εικόνες στα εγχειρίδια ή ελλιπή παραδείγματα) προέρχεται και από κάπου αλλού;

Απάντηση:

Ναι, υπάρχει και μια άλλη πηγή της σύγχυσης αυτής , απόλυτα φυσιολογική. Αυτή η πηγή, είναι η έννοια της **«κατακόρυφης ασύμπτωτης»** όπου εκεί, **όντως η κατακόρυφη ασύμπτωτη, «πλησιάζει οσοδήποτε κοντά την συνάρτηση χωρίς να την τέμνει!»**

Αυτό συμβαίνει **εξ ορισμού της κατακορύφου ασύμπτωτης συνάρτησης** και ουσιαστικά **συνιστά την γεωμετρική σημασία των** $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$ $\varepsilon\acute{\iota}\tau\varepsilon$ $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=-\infty$ $\varepsilon\acute{\iota}\tau\varepsilon$ $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=-\infty$ $\varepsilon\acute{\iota}\tau\varepsilon$ $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=-\infty$ $\varepsilon\acute{\iota}\tau\varepsilon$ $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=+\infty$ $\varepsilon\acute{\iota}\tau\varepsilon$ $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=+\infty$.

Ένα πρόχειρο επιχείρημα στην ερώτηση ***«γιατί κύριε η κατακόρυφη ασύμπτωτη δεν είναι δυνατόν να τέμνει το γράφημα της συνάρτησης»*** και η εις άτοπον απαγωγή: «Αν την έτεμνε τότε το $\lim\limits_{x\to x_0} f(x_0)$ θα ήταν πεπερασμένο και ίσο με το $f(x_0)$, αλλά έχομε πει ότι υπάρχουν κατακόρυφες ασύμπτωτες , όταν το $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ απειρίζεται.»

Συνόψιση όλων των παραπάνω:

Που έγκεινται τα διδακτικά εμπόδια στην έννοια της ασύμπτωτης συνάρτησης;

Απάντηση:

- Στην ελληνική ετυμολογία της λέξης «ασύμπτωτη»
- Στην έλλειψη καταλλήλου παραδείγματος στο διδακτικό βιβλίο.
- Στο ότι όλες οι κατακόρυφες ασύμπτωτες εξ ορισμού δεν μπορούν να τέμνουν το διάγραμμα μιας συνάρτησης.

Πώς αίρονται τα παραπάνω εμπόδια;

Απάντηση:

- Με έντονη επισήμανση, έντονο τονισμό, ότι μπορεί η έννοια να λέγεται «ασύμπτωτη», αλλά την λέξη την διάλεξαν ξένοι για λογαριασμό μας, εμείς την μεταγράψαμε φυσιολογικά στην γλώσσα μας, αλλά σε μας σημαίνει την μη έχουσα κοινά μέρη με την συνάρτηση!. Όμως, από τον μαθηματικό ορισμό της έννοιας αυτό είναι δυνατό !
- Με την ύπαρξη –τοποθέτηση στο διδακτικό βιβλίο τουλάχιστον ενός παραδείγματος ασυμπτώτου που έχει κοινά σημεία και μάλιστα άπειρα με το διάγραμμα της συνάρτησης . Το παράδειγμα να είναι τόσο χαρακτηριστικό, όπου αν θεωρήσω Μ>0 οσοδήποτε μεγάλο και τον περιορισμό της f στο $[M,+\infty]$ η f με την ασύμπτωτη να έχει άπειρα (αριθμήσιμα) κοινά σημεία .
- Στην επισήμανση στο βιβλίο, ότι **μόνο** στην έννοια της κατακόρυφης ασύμπτωτης η ασύμπτωτη δεν είναι δυνατόν να έχει κοινά σημεία με την συνάρτηση.